21/5/19

Ορισμός: Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Ένα υποσύνολο A του X λέγεται συνεκτική συνιστώσα του X αν: i) το A είναι μη κενό συνεκτικό σύνολο
ii) $A \subseteq B \subseteq X$ και το B είναι συνεκτικό τότε $A = B$
Με άλλα λόγια το A είναι maximal (μεγιστικό ή ψευδομέγιστο) συνεκτικό υποσύνολο του X.

Πρόταση: Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος
(1) κάθε συνεκτική συνιστώσα είναι κλειστό υποσύνολο του X
(2) Αν A, B είναι δύο συνεκτικές συνιστώσες του X με $A \neq B$ τότε $A \cap B = \emptyset$
(3) Για κάθε $x \in X$ υπάρχει μία (μοναδική σύμφωνα με το 2) συνεκτική συνιστώσα A του X με $x \in A$

Αποδ (1) Έστω A συνεκτική συνιστώσα του X τότε το A είναι συνεκτικό άρα το $\bar{A}$ είναι επίσης συνεκτικό. Εφόσον το A είναι maximal συνεκτικό υποσύνολο του X και $A \subseteq \bar{A}$ συμπεραίνουμε ότι $A = \bar{A}$ άρα το A είναι κλειστό

(2) Έστω A, B δύο συνεκτικές συνιστώσες του X με $A \neq B$. Τότε είτε $\exists x \in A$ με $x \notin B$ ή $\exists x \in B$ με $x \notin A$
Υποθέτουμε ότι ισχύει το πρώτο δηλ. ότι $\exists x \in A$ με $x \notin B$. Θ.δ.ο $A \cap B = \emptyset$
Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι $A \cap B \neq \emptyset$
Τότε το $A \cup B$ είναι συνεκτικό. Τότε $B \subseteq A \cup B$ και $x \in A \cup B$ με $x \notin B$ και $A \cup B$ συνεκτικό άτοπο (εφόσον το B είναι maximal συνεκτικό σύνολο)
Επομένως $A \cap B = \emptyset$

NO.

Date

(3) Θέτουμε $C(x) = \bigcup \{A : A \subseteq X,\ A \text{ συνεκτικό } x \in A\}$
Εφόσον το $\{x\}$ είναι συνεκτικό που περιέχει το x προκύπτει $x \in C(x)$. Εφόσον το $C(x)$ είναι ένωση συνεκτικών συνόλων που όλα περιέχουν το x, το $C(x)$ είναι συνεκτικό. Το $C(x)$ είναι maximal συνεκτικό σύνολο εξ' ορισμού. Άρα το $C(x)$ είναι συνεκτική συνιστώσα του X με $x \in C(x)$.

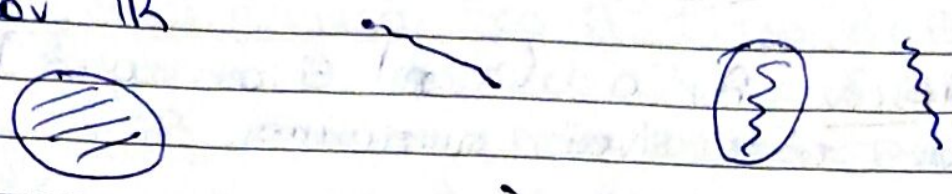
Παρατήρηση: Οι ιδιότητες (2), (3) μας δείχνουν ότι οι συνεκτικές συνιστώσες του X αποτελούν διαμέριση του X

→ Υπάρχει ένας εναλλακτικός τρόπος να οριστούν οι συνεκτικές συνιστώσες του X. Έστω (X, ρ) μ.χ. Ορίζουμε μια σχέση $\sim$ στο X ως εξής:
Για $x, y \in X$: $x \sim y \Leftrightarrow \exists$ ένα συνεκτικό υποσύνολο S του X με $x \in S$ και $y \in S$. Προφανώς η $\sim$ είναι αυτοπαθής (ανακλαστική), συμμετρική, μεταβατική.

Αν $x, y, z \in X$ με $x \sim y$ και $y \sim z$ τότε υπάρχει $S_1 \subseteq X$ με S_1 συνεκτικό και $x, y \in S_1$ και $\exists S_2 \subseteq X$ με S_2 συνεκτικό και $y, z \in S_2$. Τότε:
$y \in S_1 \cap S_2$ με $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ συνεπώς $S_1 \cup S_2$ είναι συνεκτικό. Εφόσον $x, z \in S_1 \cup S_2$ συμπεραίνουμε ότι $x \sim z$. Άρα η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας. Οι κλάσεις ισοδυναμίας της $\sim$ είναι ακριβώς οι συνεκτικές συνιστώσες του X.

Παραδείγματα ① Στον $\mathbb{R}$ θεωρούμε το εξής σύνολο: $A = [0,1] \cup \{2\} \cup (3,5)$. Οι συνεκτικές συνιστώσες του A είναι τα σύνολα $[0,1]$, $\{2\}$, $(3,5)$

② Στον $\mathbb{R}^2$

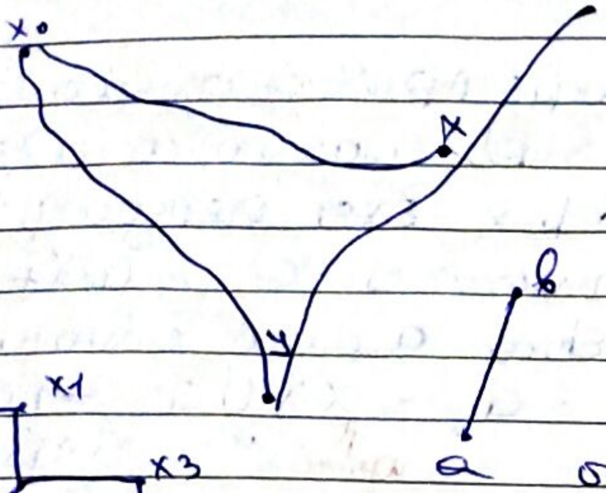


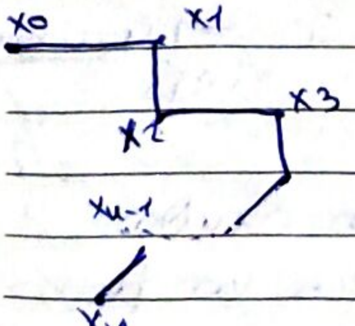
Παρατήρηση: Όπως δείξαμε πριν οι συνεκτικές συνιστώσες ενός μ.χ (X,ρ) είναι πάντα κλειστά υποσύνολα του X. Αν ο μ.χ έχει πεπερασμένες το πλήθος συνεκτικές συνιστώσες $C_1, \dots, C_n$ (για κάποιο $n \in \mathbb{N}$) τότε καθεμία είναι ανοιχτό σύνολο.
Πράγματι για κάθε $j \in \mathbb{N}$: $C_j = \underset{\text{κλειστό}}{X} \setminus \bigcup_{i \in \{1,\dots,n\} \setminus \{j\}} C_i \Rightarrow C_j$: ανοιχτό

Όμως αν ένας χώρος έχει άπειρο το πλήθος συνεκτικές συνιστώσες ενδέχεται αυτές να μην είναι ανοιχτά σύνολα. Για παράδειγμα αν θεωρήσουμε το μετρικό χώρο των ρητών $\mathbb{Q}$ με τη συνήθη μετρική ρ. Οι συνεκτικές συνιστώσες του $(\mathbb{Q},\rho)$ είναι τα σύνολα $\{x\}$, $x \in \mathbb{Q}$ τα οποία δεν είναι ανοιχτά στο $\mathbb{Q}$.

Ορισμός: Ένας μ.χ. (X,ρ) λέγεται *κατά μονοπάτια συνεκτικός* (path connected) αν $\forall\, x,y \in X$ υπάρχει $f: [0,1] \to X$ συνεχής με $f(0)=x$, $f(1)=y$

Παρατήρηση: Αν ο (X, ρ) είναι κατά μονοπάτια συνεκτικός τότε είναι συνεκτικός.





Αν ο X είναι δ.χ. και $a, b \in X$ το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα a, b είναι το σύνολο $[a,b] = \{\lambda a + (1-\lambda)b, \lambda \in [0,1]\}$
Μια πολυγωνική γραμμή στο X με κορυφές $x_0, x_1, \ldots, x_n$
$[x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \ldots \cup [x_{n-1}, x_n]$

Αν X είναι δ.χ. και $A \subseteq X$ το A λέγεται πολυγωνικά συνεκτικό αν $\forall x, y \in A$ $\exists$ $x_0, x_1, \ldots, x_n$ πολυγωνική γραμμή στο X που περιέχεται στο A με $x_1 = x$, $x_n = y$

Πρόταση: Έστω $(X, \| \ \|)$ χώρος με νόρμα και A ένα ανοικτό υποσύνολο του X. Τ.Α.Ε.:
(1) Το A είναι συνεκτικό
(2) Το A είναι κατά μονοπάτια συνεκτικό
(3) Το A είναι πολυγωνικά συνεκτικό

Απόδ.: (3) $\Rightarrow$ (2) προφανές
(2) $\Rightarrow$ (1) ισχύει γενικά

(1) ⇒ (2) Έστω $a \in A$ τυχαίο. Ορίζουμε
$B = \{ b \in A :$ υπάρχει πολυγωνική γραμμή $x_0, x_1, \dots, x_n$ στο A με $x_0 = a$, $x_n = b \}$

$\boxed{B \neq \emptyset \text{ διότι } a \in B.}$

Το B είναι ανοιχτό στο A. Έστω $b \in B$, τότε $b \in A$. Εφόσον A ανοιχτό $\exists\, \varepsilon > 0$ $B_\rho(b,\varepsilon) \subseteq A$. Εφόσον $b \in B$ υπάρχει πολυγωνική γραμμή $x_0, x_1, \dots, x_n$ στο A με $x_0 = a$ και $x_n = b$. Θα δ.ο. $B_\rho(b,\varepsilon) \subseteq B$. Έστω $\gamma \in B_\rho(b,\varepsilon)$ τότε το ευθύγραμμο τμήμα $[b,\gamma]$ περιέχεται στο A. Θέτοντας $x_{n+1} = \gamma$ η πολυγωνική γραμμή $x_0, x_1, \dots, x_n x_{n+1}$ περιέχεται στο A με $x_0 = a$ και $x_{n+1} = \gamma$. Άρα $\gamma \in B$. Επομένως το B είναι ανοιχτό (στο A).

Το B είναι κλειστό στο A. Αρκεί νδο το $A \setminus B$ είναι ανοιχτό στο A.

Έστω $b \in A \setminus B$. Τότε $b \in A$ και αφού A ανοιχτό $\exists\, \varepsilon > 0$ $B_\rho(b,\varepsilon) \subseteq A$. Θα δ.ο. $B_\rho(b,\varepsilon) \subseteq A \setminus B$

Αποδ.

Έστω $\gamma \in B_\rho(b,\varepsilon)$. Θέλουμε να δ.ο. $\gamma \notin B$. Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι $\gamma \in B$. Τότε $\exists$ πολυγωνική γραμμή εντός του A

$$\underset{\substack{\| \\ a}}{x_0}\ x_1 \dots \underset{\substack{\| \\ \gamma}}{x_n}$$

Όμως $[\gamma, b] \subseteq B_\rho(b,\varepsilon) \subseteq A$ άρα θέτοντας $x_{n+1} = b$ η πολυγωνική γραμμή $\underset{\substack{\| \\ a}}{x_0}\, x_1 \dots \underset{\substack{\| \\ \gamma}}{x_n}\, \underset{\substack{\| \\ b}}{x_{n+1}}$ βρίσκεται εντός του A και ενώνει το a με το b άρα $b \in B$ άτοπο. Συνεπώς $B_\rho(b,\varepsilon) \subseteq A \setminus B$. Άρα $A \setminus B$ ανοιχτό στο A δηλ. B κλειστό στο A.
Εφόσον A είναι συνεκτικό συμπεραίνουμε ότι $A = B$

Έτσι αν $x, y \in A$ υπάρχουν πολυγωνικές γραμμές εντός του A, από το a στο x και από το a στο y και ενώνοντας αυτές τις δύο έχουμε μια πολυγωνική γραμμή από το x στο y.

<u>Παραδείγματα σε σχέση με ομοιομορφισμούς μ.χ</u>

Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$

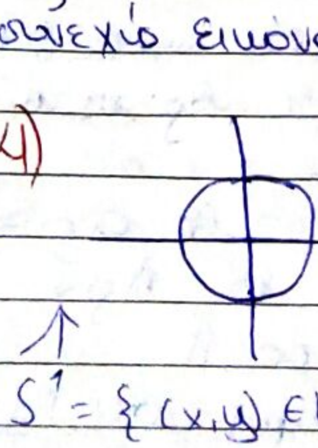
1) Τα $[a,b]$, $[a,b)$ δεν είναι ομοιομορφικά, διότι το $[a,b]$ είναι συμπαγές ενώ το $[a,b)$ όχι

2) Για τον ίδιο λόγο το $[a,b]$ δεν είναι ομοιομορφικό με το (a,b)

3) Είναι το $[a,b)$, (a,b) ομοιομορφικά?
όχι.
Αν υπήρχε $f: [a,b) \to (a,b)$ ομοιομορφισμός
Θέταμε $\gamma = f(a)$ και θεωρούμε τον περιορισμό της f στο (a,b) $g = f|_{(a,b)} : (a,b) \to (a,\gamma) \cup (\gamma, b)$ $\boxed{a < \gamma < b}$

Η g είναι συνεχής και εφόσον το (a,b) είναι συνεκτικό προκύπτει ότι το $(a,\gamma) \cup (\gamma, b)$ είναι συνεκτικό (ως συνεχής εικόνα συνεκτικών) <u>άτοπο</u> $\bot$

4)

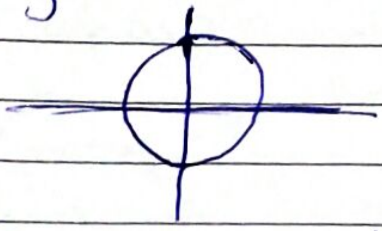


Επομένως τα $[a,b]$, (a,b) <u>δεν</u> είναι ομοιομορφικά

$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

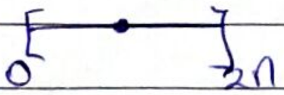
Η $f: [0,2\pi] \to S^1$ με $f(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ είναι συνεχής και επί άρα εφόσον το $[0,2\pi]$ είναι συνεκτικό το S^1 είναι συνεκτικό

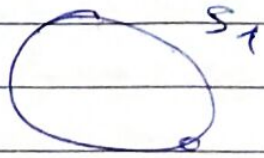
$g: [0,2\pi) \to S^1$, $g(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ είναι 1-1, επί, συνεχής



→ Τα $[0,2\pi)$, S^1 δεν είναι ομοιομορφικά διότι το $[0,2\pi)$ δεν είναι συμπαγές ενώ το S^1 είναι.

→ Τα $[0,2\pi]$, S^1 δεν είναι ομοιομορφικά.





Αν από το $[0,2\pi]$ αφαιρέσουμε ένα $x \in [0,2\pi]$ το $[0,2\pi] \setminus \{x\} = [0,x) \cup (x,2\pi]$ δεν είναι συνεκτικό.
Αντίθετα αν $a \in S^1$ το $S^1 \setminus \{a\}$ είναι συνεκτικό (είναι ομοιομορφικό με $(0,2\pi)$